

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Takmičenje iz MATEMATIKE
za IV razred srednje škole

1. U trouglu ABC je $\angle ACB = 30^\circ$. Označimo sa D središte stranice BC , a sa E podnožje visine iz tjemena A . Ako je $\angle CAD = 15^\circ$ odrediti $\angle BAE$.
2. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da važi $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 3$. Dokazati da tada važe sljedeće nejednakosti:
 - a) $a^2b^2c^2 \leq 1$.
 - b) $\frac{1}{1+a^4(b^2+c^2)} + \frac{1}{1+b^4(c^2+a^2)} + \frac{1}{1+c^4(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2}$.
3. Dokazati da ako su a, b i c neparni brojevi, tada jednačina $ax^2 + bx + c = 0$, nema racionalno rješenje.
4. Dat je niz

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{4n-2}{n}a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Dokazati da su svi članovi ovog niza prirodni brojevi.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.